公共財の自発的供給モデルにおける貢献関数の性質について

山本　真一

概 要

ナッシュ均衡に代わる公共財の自発的供給を描く均衡概念として，山本（2005）は“内生的推測変分均衡”と名づけられた均衡概念を提示した。この均衡概念における公共財に対する個人の貢献関数の性質を，他の個人の貢献に関する推測を表現する変数の観点から分析する。その結果，これらの変数が公共財に対する貢献を促進する変数とそれを抑制する変数とに分類されることを明らかにする。

1．はじめに

公共財の自発的供給は，典型的には，ナッシュ均衡によって記述される[1)]。ナッシュ均衡に代わるモデルとして，山本（2005）は“内生的推測変分均衡”と名づけられた新たな均衡概念を提示した。本稿では，この均衡概念における個人の公共財に対する貢献を記述する関数の性質を明らかにする。

山本（2005）は，ある個人による公共財の与えられた貢献に対して，他の個人による公共財の貢献に関する推測の概念を導入し，それを独立項と推測変分からなる対によって表現した。前者は個人の行動によって影響を与えることができないと推測される他の個人による貢献を表す一方，後者はその影響度合いに関する推測を表現する変数である。これらの変数が与えられたときに，個人の効用最大化問題を通じて公共財に対する貢献を与える関数を貢献関数と呼ぶ。

本稿では，これらの変数が公共財に対する貢献を促進する変数とそれを抑制する変数とに分類されることを示す。つまり，推測変分が前者に相当する一方，独立項が後者に相当する。したがって，内生的推測変分均衡は個人の公共財に対する貢献行動がこれら２つの要因によって決定されることを表現する均衡概念である。

内生的推測変分均衡とナッシュ均衡およびリンダール均衡との関係に関しては，次のことが言える。山本（2005）が明らかにしたように，ナッシュ均衡は推測変分がゼロであるときの内生的推測変分均衡によって特徴づけられ，またそのときの後者における独立項は前者における他の個人による公共財への貢献の合計に一致する。したがって，本稿において明らかにされる貢献関数の性質より，ナッシュ均衡は非協力的な均衡概念である。さらに，内生的推測変分均衡は，独立項を適切に選ぶことによって，ナッシュ均衡で表現される非協力的な均衡配分，そしてリンダール均衡で表現される協力的な均衡配分を達成するという意味で，包括的な均衡概念となっている[2)]。

本稿の構成は以下のとおりである。第２節では，内生的推測変分均衡において用いられる貢献関数の定義を与えるとともに，貢献関数と密接な関係を持つ人工的な問題に対する需要関数を定義する。第３節では貢献関数が他の個人による貢献についての推測を表す変数に関して厳密な増加関数（または減少関数）であることを示す。

２．モデル

私的財が１種類，公共財が１種類あるとする。n 人の個人が存在する経済を想定する。個人のインデックス集合を$N \overset{\text{def}}{=} \{1,2,...,n\}$ で表す[3]。$I \overset{\text{def}}{=} (I_1,...,I_n)$ をすべてが正の与えられた所得分配とし，x_iを第 i 個人の私的財消費，g_i を第 i 個人の公共財に対する貢献，$G \overset{\text{def}}{=} \sum_{i\in N} g_i$を公共財の総供給とする。$u_i(x_i, G)$, $i\in N$を第 i 個人の効用関数とする。公共財１単位は私的財１単位によって生産されるものとする。したがって私的財価格を１とすれば，公共財の量を適当に調整することによって，公共財価格も１となるように正規化することができる。ここで，効用関数に次の仮定をおく[4]。

仮定 1 効用関数 $u_i(x_i, G)$ は $\mathbb{R}^2_+$ 上で連続で増加的かつ準凹，$\mathbb{R}^2_{++}$ 上で狭義準凹かつ厳密な増加関数である，$i \in N$.

仮定 2 $u_i(0, G) = u_i(x_i, 0) = \inf\{u_i(\tilde{x}_i, \tilde{G}) \mid (\tilde{x}_i, \tilde{G}) \in \mathbb{R}^2_+\}, \forall (x_i, G) \in \mathbb{R}^2_+,\ i \in N.$

仮定 3 効用関数 $u_i(x_i, G)$ は $\mathbb{R}^2_{++}$ 上で２回連続微分可能，かつ

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i, G) > 0,$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial G}(x_i, G) > 0, \quad \text{if}(x_i, G) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

である，$i \in N$.

仮定 4 効用関数 $u_i(x_i, G), i \in N$ の縁付きヘシアン行列式について，

$$\begin{vmatrix} 0 & u_{ix}(x_i,G) & u_{iG}(x_i,G) \\ u_{ix}(x_i,G) & u_{ixx}(x_i,G) & u_{ixG}(x_i,G) \\ u_{iG}(x_i,G) & u_{ixG}(x_i,G) & u_{iGG}(x_i,G) \end{vmatrix} \neq 0, \forall (x_i, G) \in \mathbb{R}^2_{++}$$

が成り立つ。ただし，

$$u_{ix}(x_i,G) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x_i,G), \qquad u_{iG}(x_i,G) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial u_i}{\partial G}(x_i,G), \qquad u_{ixx}(x_i,G) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i^2}(x_i,G)$$
$$u_{ixG}(x_i,G) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial G}(x_i,G), \quad u_{iGG}(x_i,G) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u_i}{\partial G^2}(x_i,G), \quad i \in N$$

である。

いま，第 i 個人について，他の個人による公共財への貢献の合計を$G_{-i} \overset{\text{def}}{=} \sum_{j\neq i} g_j$とする。第 i 個人による他の個人の貢献の合計に対する予想は，

$$a_i + b_i g_i,\ 0 \leqq a_i \leqq \sum_{j\neq i} I_j,\ i \in N$$

によって与えられるとする。b_i は推測変分を表し，正の値も負の値もとりうる。また a_i は，

第 i 個人が公共財に貢献しないときの他の個人の貢献についての推測を表し，独立項と呼ばれる。また，関数

$$H_i(g_i) \overset{\text{def}}{=} \max\{a_i + (1+b_i)g_i, 0\}$$

を定義する。この関数は，個人の公共財総供給量に関する推測が非負であるという制約を表している。このとき，彼の最大化問題

$$\max_{x_i, g_i} \ u_i\Big(x_i, H_i(g_i)\Big) \ \text{ sub. to } \ x_i + g_i = I_i, x_i \geqq 0, g_i \geqq 0 \tag{1}$$

を考える，$i \in N$。この問題の解における私的財消費，公共財への貢献をそれぞれ $\eta_i(a_i, b_i, I_i)$，$\psi_i(a_i, b_i, I_i)$ と表現する。ここで，関数 $\psi_i(\cdot, \cdot, I_i) : [0, \sum_{j \neq i} I_j] \times (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ を第 i 個人の貢献関数と呼ぶ。

次に，人工的な所得 $Y_i, i \in N$ を導入して，公共財への税価格を $\frac{1}{1+b_i}, b_i > -1$ として，問題

$$\max_{x_i, G} u_i(x_i, G) \ \text{ sub. to } x_i + \frac{1}{1+b_i}G = Y_i \tag{2}$$

を想定する[5)]。この解を $\xi_i(b_i, Y_i)$，$\phi_i(b_i, Y_i)$ と書く。この問題は，リンダール均衡を求める際に用いられるものに対応している。ここで，次の仮定をおく。

仮定 5 すべての個人にとって，私的財，公共財ともに正常財であり，かつ，それらの財は粗代替財である。つまり，

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial Y_i}(b_i, Y_i) > 0,$$
$$\frac{\partial \phi_i}{\partial Y_i}(b_i, Y_i) > 0,$$
$$\frac{\partial \xi_i}{\partial b_i}(b_i, Y_i) < 0 \ , \forall (b_i, Y_i) \in (-1, +\infty) \times \mathbb{R}_{++}, \ \forall i \in N$$

である。

3．貢献関数の性質

この節では，貢献関数の性質を取り扱う。はじめに，問題（1）と問題（2）の解の間の関係を表現した次の補助定理を準備しておく。

補助定理 1 効用関数が仮定 1, 2 を満たすとする。与えられた $a_i \in [0, \sum_{j \neq i} I_j], b_i > -1$ について，$\psi_i(a_i, b_i, I_i) > 0$ とする。そのとき，

$$Y_i \overset{\text{def}}{=} I_i + \frac{a_i}{1+b_i} \tag{3}$$

によって Y_i を定義すると，

$$a_i + (1+b_i)\psi_i(a_i, b_i, I_i) = \phi_i(b_i, Y_i)$$
$$\eta_i(a_i, b_i, I_i) = \xi_i(b_i, Y_i)$$

が成立する, $i \in N$。

［証明］任意に与えられた第 i 個人について,

$$x_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \eta_i(a_i, b_i, I_i),$$
$$G^* \stackrel{\text{def}}{=} a_i + (1+b_i)\psi_i(a_i, b_i, I_i)$$

とする。そのとき,

$$x_i^* + \frac{G^*}{1+b_i}$$
$$= \eta_i(a_i, b_i, I_i) + \frac{a_i}{1+b_i} + \psi_i(a_i, b_i, I_i) = I_i + \frac{a_i}{1+b_i} = Y_i$$

となる。したがって,

$$u_i(x_i^*, G^*) \leqq u_i\big(\xi_i(b_i, Y_i), \phi_i(b_i, Y_i)\big)$$

が成り立つ。いま $u_i(x_i^*, G^*) < u_i(\xi_i(b_i, Y_i), \phi_i(b_i, Y_i))$ と仮定してみよう。$0 < \lambda < 1$ にたいして,

$$x_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\xi_i(b_i, Y_i) + (1-\lambda)x_i^*,$$
$$G(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\phi_i(b_i, Y_i) + (1-\lambda)G^*$$

とする。$x_i^* > 0$ かつ $G^* = a_i + (1+b_i)\psi_i(a_i, b_i, I_i) > a_i \geqq 0$ であるから，λ が十分 0 に近い数であれば，$x_i(\lambda) > 0$ かつ $G(\lambda) > a_i$ である。よって，２点 (x_i^*, G^*)，$(x_i(\lambda), G(\lambda))$ は効用関数の定義域の内点である。効用関数の狭義準凹性によって，

$$u_i(x_i^*, G^*) < u_i(x_i(\lambda), G(\lambda))$$

である。さらに，$x_i(\lambda) + \frac{G(\lambda)}{1+b_i} = Y_i$ であるから，

$$\hat{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G(\lambda) - a_i}{1+b_i} > 0$$

とすると,

$$u_i(x_i(\lambda), a_i + (1+b_i)\hat{g}_i) = u_i(x_i(\lambda), G(\lambda))$$
$$> u_i(x_i^*, G^*) = u_i(\eta_i(a_i, b_i, I_i), a_i + (1+b_i)\psi_i(a_i, b_i, I_i))$$

となる。この式において，最左辺の値が最右辺の値を上回るので,これは η_i（a_i, b_i, I_i），ψ_i（a_i, b_i, I_i）の定義に矛盾する。よって，所期の結果が成り立つ。（証明終）

貢献関数の性質について，以下の定理が成り立つ。

定理１ 効用関数が仮定1, 2, 3, 4, 5を満たすとする。そのとき任意の $i \in N$ について，以下のことが成立する。

（i）$\psi_i(a_i, b_i, I_i)$ は $a_i \in [0, \sum_{j \neq i} I_j]$ について厳密な減少関数である。
（ii）$\psi_i(a_i, b_i, I_i)$ は $b_i \in (-1, +\infty)$ について厳密な増加関数である。

［証明］(i) 仮定４は関数$\psi_i(a_i, b_i, I_i)$, $i \in N$ の微分可能性を保証する[6)]。まず，$a_i \in (0, \Sigma_{j \neq i} I_j)$ のケースから証明する。(3) 式によって与えられた$Y_i, b_i \in (-1, +\infty)$, $i \in N$について，$\xi_i(b_i, Y_i)>0$, $\phi_i(b_i, Y_i)>0$である。問題 (2) の１階条件より，

$$\frac{u_{ix}}{u_{iG}}\big(\xi_i(b_i, Y_i), \phi_i(b_i, Y_i)\big) \equiv 1 + b_i,\ i \in N \tag{4}$$

が成立する。これを Y_iについて偏微分して，問題 (2) の予算制約式 $\xi_i(b_i, Y_i) \equiv Y_i - \phi_i(b_i, Y_i)/(1+b_i)$ を用いて変形すると，

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial Y_i}(b_i, Y_i) = \frac{1}{|\Delta_i|}\frac{u_{ix}}{u_{iG}}\Big(u_{ixx} - \frac{u_{ix}}{u_{iG}}u_{ixG}\Big) > 0,\ i \in N$$

となる。ここで，$|\Delta_i| \overset{\text{def}}{=} u_{ixx} - 2\frac{u_{ix}}{u_{iG}}u_{ixG} + \big(\frac{u_{ix}}{u_{iG}}\big)^2 u_{iGG} < 0$ である。さらに，$\frac{\partial \xi_i}{\partial Y_i}(b_i, Y_i) = 1 - \frac{1}{1+b_i}\frac{\partial \phi_i}{\partial Y_i}(b_i, Y_i)$ を考慮すれば，この式から，

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial Y_i}(b_i, Y_i) = \frac{1}{|\Delta_i|}\Big(\frac{u_{ix}}{u_{iG}}\Big)^2\Big(u_{iGG} - \frac{u_{iG}}{u_{ix}}u_{ixG}\Big) > 0,\ i \in N$$

が得られる。これら２つの式より，

$$u_{ixx} - \frac{u_{ix}}{u_{iG}}u_{ixG} < 0, \tag{5}$$

$$u_{iGG} - \frac{u_{iG}}{u_{ix}}u_{ixG} < 0,\ i \in N \tag{6}$$

が成立する。また，(4) 式を b_i について偏微分し，予算制約式$\xi_i(b_i, Y_i) + \phi_i(b_i, Y_i)/(1+b_i) \equiv Y_i$ を用いて変形すると，

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial b_i}(b_i, Y_i) = \frac{1}{|\Delta_i|}\big(\phi_i(b_i, Y_i) \times (u_{iGG} - \frac{u_{iG}}{u_{ix}}u_{ixG}) + u_{iG}\big) < 0,\ i \in N \tag{7}$$

となる。

一方，与えられたa_i, b_i について，$\psi_i(a_i, b_i, I_i) > 0$, $\eta_i(a_i, b_i, I_i) > 0$, $i \in N$ である。問題 (1) の１階条件より，

$$\frac{u_{iG}}{u_{ix}}\big(I_i - \psi_i(a_i, b_i, I_i), a_i + (1+b_i)\psi_i(a_i, b_i, I_i)\big) \equiv \frac{1}{1+b_i},\ i \in N \tag{8}$$

が成立する。これをa_i について偏微分して整理すると，(6) 式より，

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial a_i}(a_i, b_i, I_i) = -\frac{1}{|\Delta_i|}\Big(\frac{u_{ix}}{u_{iG}}u_{iGG} - u_{ixG}\Big) < 0,$$
$$\forall (a_i, b_i) \in (0, \sum_{j \neq i} I_j) \times (-1, +\infty),\ i \in N$$

となる。

次に，$a_i \in \big\{0, \sum_{j \neq i} I_j\big\}$のケースについて証明する。開区間 $(0, \sum_{j \neq i} I_j)$ から任意にa_iを選ぶと，$\psi_i(\cdot, b_i, I_i)$ の厳密な単調減少性より，

$$\psi_i(0, b_i, I_i) \geqq \psi_i(a_i, b_i, I_i)$$

が成り立つ。いま仮に，

$$\psi_i(0, b_i, I_i) = \psi_i(a_i, b_i, I_i)$$

であったとする。そのとき，任意に与えらた $\hat{a}_i \in (0, a_i)$ について，

$$\psi_i(\hat{a}_i, b_i, I_i) > \psi_i(0, b_i, I_i) \tag{9}$$

となる。そこで，

$$\begin{aligned} &a_i^1 = \hat{a}_i,\ a_i^\nu < a_i^{\nu'} \text{ if } \nu > \nu', \\ &a_i^\nu \rightarrow\ 0 \text{ if } \nu \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

を満たす列 a_i^ν, $\nu = 1,2,\ldots$ を開区間（$0, \sum_{j\neq i} I_j$）からとることができる。そのとき，$\nu \geqq 2$ について，

$$\psi_i(a_i^\nu, b_i, I_i) > \psi_i(\hat{a}_i, b_i, I_i)$$

となる。$\nu \to +\infty$とすると，$\psi_i(a_i, b_i, I_i)$ の連続性より，

$$\psi_i(0, b_i, I_i) \geqq \psi_i(\hat{a}_i, b_i, I_i)$$

となる。これは（9）に矛盾である。よって，

$$\psi_i(0, b_i, I_i) > \psi_i(a_i, b_i, I_i),\ \forall a_i \in (0, \sum_{j\neq i} I_j)$$

が成り立つ。$a_i = \sum_{j\neq i} I_j$ の場合についても，同様に証明することができる。

（ii）（7）式および補助定理１より，

$$\begin{aligned} 0 &< \phi_i(b_i, Y_i) \times \left(u_{iGG} - \frac{u_{iG}}{u_{ix}} u_{ixG}\right) + u_{iG} \\ &= \left(\frac{a_i}{1+b_i} + \psi_i(a_i, b_i, I_i)\right) \times \left(\frac{u_{ix}}{u_{iG}} u_{iGG} - u_{ixG}\right) + u_{iG} \\ &\leqq \psi_i(a_i, b_i, I_i) \times \left(\frac{u_{ix}}{u_{iG}} u_{iGG} - u_{ixG}\right) + u_{iG} \end{aligned}$$

となる。そこで，（8）式をb_iについて偏微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_i}{\partial b_i}(a_i, b_i, I_i) = -\frac{1}{|\Delta_i|}\Big(\psi_i(a_i, b_i, I_i) \times (\frac{u_{ix}}{u_{iG}} u_{iGG} - u_{ixG}) + u_{iG}\Big) > 0, \\ \forall (a_i, b_i) \in [0, \sum_{j\neq i} I_j] \times (-1, +\infty),\ i \in N \end{aligned}$$

となる。（証明終）

この定理から得られる公共財の総供給量に関する含意は，以下のとおりである。まず，山本（2005）で定義された内生的推測変分均衡において，独立項を外生変数として，また推測変分を内生変数としている。この均衡概念のもとでは，独立項の変化による公共財総供給量の変化は推測変分の変化に依存する。推測変分が独立項の減少関数であれば，定理１より，

公共財総供給量は独立項の減少関数になる[7)]。逆に，推測変分が独立項の増加関数であれば，公共財総供給量の変化は定まらない。これらの問題についての考察は，今後の課題としたい。

注

1）ナッシュ均衡の性質は，Bergstrom-Blume-Varian（1986）などによって分析されている。Iritani-Yamamoto（2004）は，ナッシュ均衡の問題点を明らかにしている。
2）後者の点に関しては，山本（2005）の定理４を参照されたい。
3）記号“ $\stackrel{\mathrm{def}}{=}$ ”は，左辺が右辺によって定義されることを表す。
4）$\mathbb{R}^2_+$ は２次元非負ベクトルの集合であり，また $\mathbb{R}^2_{++}$ は２次元正ベクトルの集合である。
5）山本（2005）は，公共財への税価格 β_i を $\beta_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1/(1+b_i)$ によって定義すれば，問題（2）の解によって内生的推測変分均衡が特徴づけられることを示している。詳しくは，山本（2005）の定理３およびその証明を参照されたい。
6）詳しくは，Mas-Colell, Whinston, and Green（1994），chapter 3 を参照せよ。
7）この場合，独立項の増加は，それが直接的に各個人の公共財への貢献を抑制するのみならず，各個人の推測変分を低下させることを通じて，間接的にも公共財への貢献を抑制するように働く。

参考文献

T. Bergstrom, L. Blume, and H. Varian（1986), “On the Private Provision of Public Goods,” *Journal of Public Economics,* 29, 25-49.

J. Iritani and S. Yamamoto（2004), “Are two Public Goods too many?,” *Kobe University Discussion Paper* No.0311.

A. Mas-Colell, M.D. Whinston, and J.R. Green（1995), *Microeconomic Theory*, New York: Oxford University Press.

山本真一（2005)「公共財の自発的供給：推測変分均衡とパレート効率性」『六甲台論集』第51 巻第４号, 56-73.

On the Properties of Contribution Function in the Private Provision of Public Goods

Shin-ichi Yamamoto

Abstract

Yamamoto(2005) [Yamamoto, S.,(2005), koukyouzai no jihatsuteki kyoukyuu: suisoku henbun kinkou to pareeto kouritsusei (in Japanese), *Rokkodai Ronshu*, 51(4), 56-73.] presented an equilibrium concept named *the endogeneous conjectural variations equilibrium* as a substitute for the Nash equilibrium in the private provision of public goods. In this paper, we analyze the properties of individual contribution functions for public goods under this equilibrium concept in terms of variables representing conjectures of contributions by the other individuals. As a result, we clarify that these variables are classified into contribution-inducing and contribution-disturbing variables.

Keywords: Private provision; Public goods; Contribution function